«Уравнение, как математическая модель реальной ситуации»

учитель будущего

Леднёва Татьяна Викторовна, учитель математики МБОУ СОШ № 19 имени Романа Катасонова, г.о. Серпухов, заместитель председателя региональной предметной комиссии ГИА-11 по математике Московской области, тренер ШПМ

учитель будущего

«...пока мы стараемся увязывать обучение математике с жизнью, нам будет трудно обойтись без текстовых задач – традиционного для отечественной методики средства обучения математике».

А.В.Шевкин

учитель будущего

Актуальность данной темы

- Текстовые задачи моделируют реальные жизненные ситуации
- Работа с текстовыми задачами развивает целый комплекс умений:
  - читательскую грамотность (понимание и анализ текста),
  - логическое и критическое мышление,
  - способность к абстрагированию и математическому моделированию,
  - навык самоконтроля и проверки результата на соответствие реальности.
- текстовые задачи занимают центральное место в итоговой аттестации

Назначение Всероссийской проверочной работы

Всероссийские проверочные работы (ВПР) проводятся в целях осуществления мониторинга уровня и качества подготовки обучающихся в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов и федеральных основных общеобразовательных программ.

Подходы к отбору содержания проверочной работы

Всероссийские проверочные работы основаны на системно-деятельностном, уровневом и комплексном подходах к оценке образовательных достижений. В рамках ВПР наряду с предметными результатами освоения основной образовательной программы основного общего образования оценивается также достижение метапредметных результатов, включающих освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (познавательные, коммуникативные, регулятивные).

учитель будущего

Достижение планируемых результатов в соответствии с ФОП ООО

В соответствии с рабочей программой по алгебре

К концу обучения **в 7 классе** обучающийся получит следующие предметные результаты: решать практико-ориентированные задачи, связанные с отношением величин, пропорциональностью величин, процентами, интерпретировать результаты решения задач с учётом ограничений, связанных со свойствами рассматриваемых объектов.

Составлять и решать линейное уравнение или систему линейных уравнений по условию задачи, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат.

К концу обучения **в 8 классе** обучающийся получит следующие предметные результаты:

Переходить от словесной формулировки задачи к её алгебраической модели с помощью составления уравнения или системы уравнений, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат.

К концу обучения **в 9 классе** обучающийся получит следующие предметные результаты:

Решать текстовые задачи алгебраическим способом с помощью составления уравнения или системы двух уравнений с двумя переменными.

№	Проверяемый элемент содержания	Проверяемые предметные результаты	Код КТ/ КЭС	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания
Часть 1					
3	Уравнения и неравенства	Переходить от словесной формулировки задачи к ее алгебраической модели с помощью составления уравнения или системы уравнений, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат	3.3/3	Б	1
Часть 2					
15	Уравнения и неравенства	Переходить от словесной формулировки задачи к ее алгебраической модели с помощью составления уравнения или системы уравнений, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат	3.3/3	Б	2

Код проверяемого требования	Проверяемые требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования	Мета–предметный результат
3	**Решение текстовых задач**	
3.1	Решать многошаговые текстовые задачи арифметическим способом	МП 1.1
3.2	Решать задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, процентами; решать три основные задачи на дроби и проценты	МП 1.1
3.3	Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние, цену, количество, стоимость, производительность, время, объем работы, используя арифметические действия, оценку, прикидку; пользоваться единицами измерения соответствующих величин	МП 1.1–1.3; 3.2
3.4	Составлять буквенные выражения по условию задачи	МП 1.1; 1.2; 3.1
3.5	Извлекать информацию, представленную в таблицах, на линейной, столбчатой или круговой диаграммах; интерпретировать представленные данные, использовать данные при решении задач	МП 1.1–1.3; 3.1
3.6	Представлять информацию с помощью таблиц, линейной и столбчатой диаграмм	МП 1.1; 1.3

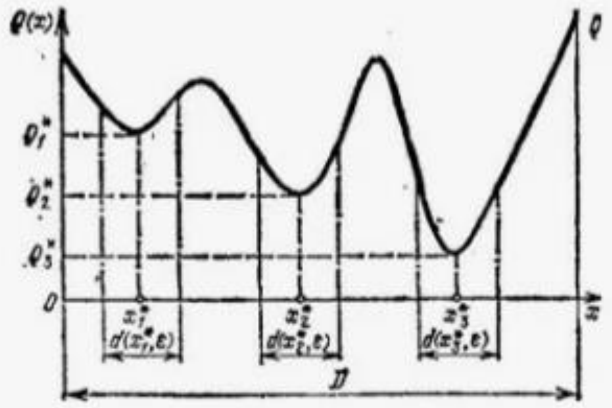
1	**Познавательные УУД**
1.1	***Базовые логические действия***
1.1.1	Выявлять и характеризовать существенные признаки объектов (явлений)
1.1.2	Устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа
1.1.3	С учетом предложенной задачи выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых фактах, данных и наблюдениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий; выявлять дефициты информации, данных, необходимых для решения поставленной задачи

Код	Проверяемые элементы содержания
5	**Решение текстовых задач**
5.1	Решение текстовых задач арифметическим способом
5.2	Решение логических задач. Решение задач перебором всех возможных вариантов
5.3	Решение задач, содержащих зависимости, связывающих величины: скорость, время, расстояние, цена, количество, стоимость, производительность, время, объем работы. Единицы измерения: массы, стоимости, расстояния, времени, скорости. Связь между единицами измерения каждой величины
5.4	Решение задач, связанных с отношением, пропорциональностью величин, процентами; решение основных задач на дроби и проценты

учитель будущего

Дефицит, выявленный в ходе ВПР

Умение переходить от словесной формулировки задачи к её алгебраической модели с помощью составления уравнения или системы уравнений, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат



Что такое алгебраическая модель?

Алгебраическая модель — это описание реальной ситуации, процесса или объекта с помощью математических понятий: уравнений, неравенств и их систем, позволяющее исследовать и прогнозировать результат.

учитель будущего

Роль уравнений и систем уравнений как инструментов моделирования реальных процессов

1. Перевод словесного описания на язык математики
2. Выявление неизвестных и поиск решений
3. Уравнения и системы уравнений позволяют обобщение и прогнозирование результатов

Однажды построенная модель может применяться не только к одной задаче, но и к целому классу подобных ситуаций.

4. Анализ и интерпретация реальности
5. Развитие логического и функционального мышления

учитель будущего

Основные умения, необходимые для работы с текстовыми задачами

- Чтение и понимание условия задачи (анализ текста).
- Выделение величин, их взаимосвязей и неизвестных.
- Перевод словесной формулировки в алгебраическую модель: составление уравнения или системы уравнений; выбор переменных и единиц измерения.
- Решение полученной модели (алгебраически).
- Интерпретация результата в контексте исходной ситуации: проверка соответствия ответа условию; отсеивание нереалистичных решений (например, отрицательного времени или количества людей).

учитель будущего

Анализ типичных дефицитов у учащихся

Дефицит 1. Трудности в переходе от текста к модели

- Неумение выделить ключевые величины и связи между ними.
- Страх перед «длинными» условиями — отказ от анализа задачи.
- Путаница в обозначении переменных

Задание 6

Два туриста отправляются из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 5 км, в противоположных направлениях. Через 2 часа 15 минут расстояние между ними стало равным 32 км. Найдите скорости туристов, если скорость одного больше скорости другого на 0,6 км/ч?

Решение

Пусть x - скорость первого туриста, тогда скорость второго $(x+0,6)$.

Составим и решим уравнение:

1) $x+x+0,6=32$;

$2x+0,6=32$;

$2x=32-0,6$;

$2x=31,4$;

$x=31,4:2$;

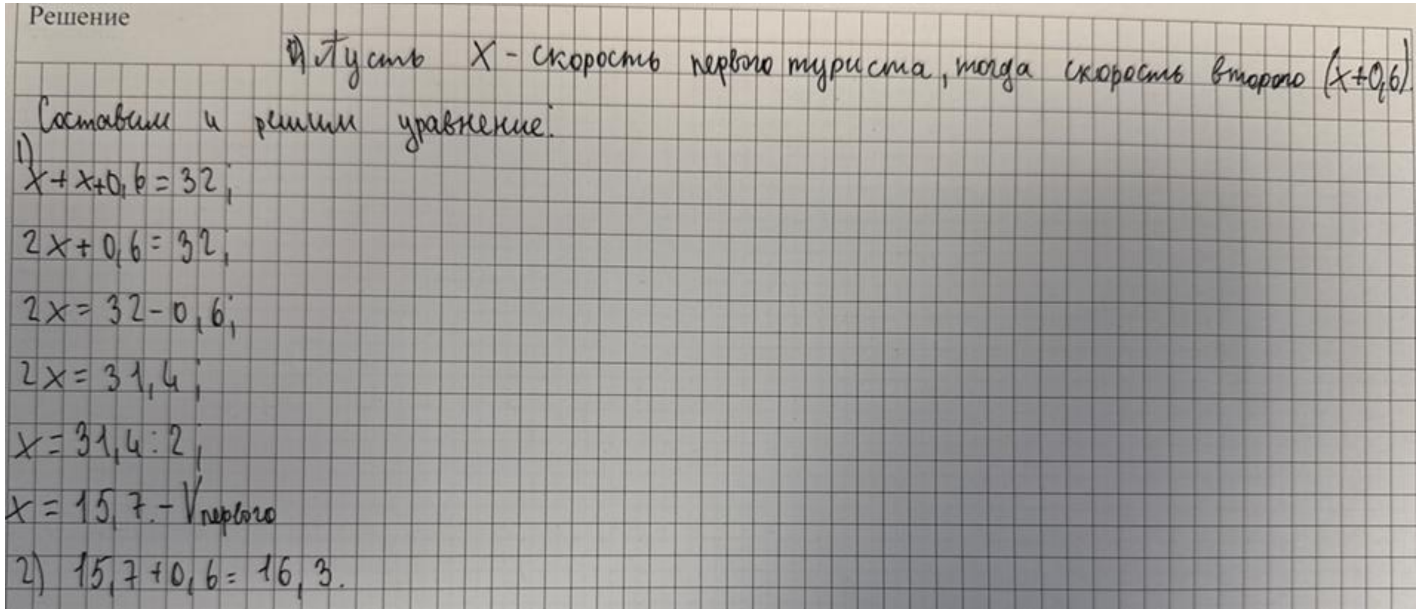
$x=15,7$ - $V_{первого}$

2) $15,7+0,6=16,3$.

Переменная ***x*** формально введена, но её роль в отношении к условию не проверена.

Задание 6

Два туриста отправляются из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 5 км, в противоположных направлениях. Через 2 часа 15 минут расстояние между ними стало равным 32 км. Найдите скорости туристов, если скорость одного больше скорости другого на 0,6 км/ч?


Решение

1) Пусть x - скорость первого туриста, тогда скорость второго $(x+0,6)$

Составим и решим уравнение:

1) $x+x+0,6=32;$

$2x+0,6=32;$

$2x=32-0,6;$

$2x=31,4;$

$x=31,4:2;$

$x=15,7$ - $V_{первого}$

2) $15,7+0,6=16,3.$

Переменная x формально введена, но её роль в отношении к условию не проверена.

Путаница переменных — это не арифметическая ошибка, а нарушение логической структуры модели. Оно показывает, что учащийся не до конца осознаёт смысл вводимых обозначений и связь между реальной ситуацией и её математическим отражением. Работа над этой ошибкой — важный шаг в развитии математического мышления.

Анализ типичных дефицитов у учащихся

Дефицит 2.

• Непонимание смысла полученного решения

• Механическое решение уравнения без проверки адекватности ответа.

• Игнорирование ограничений, вытекающих из контекста (например, число людей не может быть дробным или отрицательным).

• Отсутствие привычки формулировать полный ответ на вопрос задачи.

учитель будущего

Пример: Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить заказ за 6 часов. Первый рабочий, работая один, тратит на эту работу на 5 часов больше, чем второй. За сколько часов может выполнить заказ первый рабочий?

Решение: Пусть первый рабочий тратит на работу x часов. Тогда второй — на 5 часов меньше, то есть x−5 часов.

⚠ Вот здесь появляется скрытое ограничение: x−5>0⇒x>5 .

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{(x-5)+x}{x(x-5)} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{2x-5}{x^2-5x} = \frac{1}{6}$$

$$6(2x-5) = x^2 - 5x$$
$$12x - 30 = x^2 - 5x$$
$$0 = x^2 - 17x + 30$$

$$x^2 - 17x + 30 = 0$$
$$D = 289 - 120 = 169 = 13^2$$
$$x = \frac{17 \pm 13}{2} \Rightarrow x_1 = 15, \quad x_2 = 2$$

Ученик, решая уравнение, видит два "нормальных" корня и может не заметить, что один из них делает время другого рабочего отрицательным.

Для покупки кроссовок и ветровки Матвей решил сравнить цены товаров в двух интернет – магазинах. В первом магазине общая стоимость покупки оказалась равной 6000 рублей. В другом интернет-магазине кроссовки стоили на 10% дешевле, а ветровка на 5% дороже, общая стоимость покупки оказалась равной 6120 рублям. Сколько стоила ветровка в первом интернет-магазине?

Решение

Пусть x – кроссовки, а y – ветровка, тогда составим 2 уравнения.

$$\begin{cases} x+y=6000 \\ 0,9x+1,05y=6120 \end{cases}$$

$x=6000-y$, теперь подставим этот x во 2 уравнение.

$0,9\cdot(6000-y)+1,05y=6120$

$5400-0,9y+1,05y=6120$

$0,15y=720$

$y=4800$

$x=6000-y$

$x=6000-4800$

$x=1200$

Ответ: 1200

Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длинной 20 км ему потребовалось на 20 мин. меньше, чем второму. Чему равны скорости велосипедистов? Пусть x км/ч скорость первого велосипедиста.

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+3}=20$$

Учащийся воспринимает задачу как формальную процедуру: «реши уравнение (систему уравнений) → найди x → готово».

учитель будущего

Причины возникновения дефицитов

• Недостаточное внимание к работе с текстом на уроках математики.
• Преобладание на уроках алгоритмических заданий над задачами с открытым контекстом.
• Слабая межпредметная связь (например, с русским языком — навыки анализа текста).
• Отсутствие систематической практики построения моделей «с нуля».

учитель будущего

Практические рекомендации для учителя

• Этапность работы с задачей:

1. Чтение и пересказ условия своими словами.
2. Выделение вопроса и неизвестных.
3. Введение переменных с пояснением.
4. Составление уравнения (системы уравнений) с обоснованием.
5. Решение и интерпретация результата.

• Использование визуальных схем: таблицы, схемы, рисунки (особенно в задачах на движение, работу, смеси).

• Разбор «некорректных» решений: когда уравнение решено верно, но ответ не имеет смысла.

• Включение в уроки реальных жизненных ситуаций (бюджет, расчёт скидок, планирование маршрута и т.п.).

• Формирование привычки задавать вопросы: «Что мы нашли, получив корень уравнения?», «Можем ли мы ответить на вопрос задачи?», «Может ли такое быть в реальности?»

учитель будущего

Типичные ошибки учащихся при решении задач

Задача 1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 210 км, выехал автомобилист. Через 1 час из пункта В навстречу ему выехал велосипедист. Они встретились через 3 часа после выезда автомобилиста. Найдите скорость автомобилиста, если она в 4 раза больше скорости велосипедиста.

Пусть x — скорость мотоциклиста.
Тогда скорость автомобилиста — $4x$.

Путь автомобилиста: $4x \cdot 3 = 12x$
Путь мотоциклиста: $x \cdot 3 = 3x$
Сумма:

$$12x + 3x = 210 \Rightarrow 15x = 210 \Rightarrow x = 14$$

→ Скорость автомобилиста: $4 \cdot 14 = 56$ км/ч.
Ответ: 56 км/ч

Ошибка – не учтено, что велосипедист выехал позже.
Оба ответа — целые числа (56 и 14).
Оба — реалистичные скорости.
Ошибка — **не в арифметике, а в модели** (время движения второго участника).
Уравнение в обоих случаях выглядит логично и естественно.

учитель будущего

Типичные ошибки учащихся при решении задач

Задача 2. Первый рабочий может выполнить заказ за 8 часов, второй — за 12 часов. Они начали работать вместе, но через 2 часа первый рабочий ушёл, а второй закончил работу один. Сколько времени потрачено на выполнение заказа?

Производительность первого: $\frac{1}{8}$, второго: $\frac{1}{12}$.

Вместе за 1 час: $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$.

За 2 часа они сделают: $2\cdot\frac{5}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ заказа.

Осталось: $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$.

Второй делает $\frac{1}{12}$ в час, значит, на остаток уйдёт:

$$\frac{7}{12}:\frac{1}{12}=7\text{ часов}$$

Ответ: 7 часов.

Ошибка — потеря части времени

учитель будущего

Типичные ошибки учащихся при решении задач

Задача 3. Из двух городов, расстояние между которыми 280 км, выехали одновременно навстречу друг другу легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости грузового. Найдите скорость каждого автомобиля, если встреча произошла через 2 часа после их выезда.

Пусть x км/ч — скорость легкового автомобиля.
Тогда (x+20) км/ч — скорость грузового автомобиля.

Составляем уравнение:
$2x+2(x+20)=280$
$2x+2x+40=280$
$4x=240$
$x=60$

Ответ: скорость легкового автомобиля 60 км/ч, грузового — 80 км/ч.

Ошибка: ученик неправильно определил, какая скорость больше: по условию задачи легковой автомобиль едет быстрее на 20 км/ч, а в решении наоборот — грузовой быстрее.

Типичные ошибки учащихся при составлении уравнений

- Неправильное определение неизвестной величины.
- Путаница в отношениях между величинами.
- Пропуск важных условий задачи.
- Неверная подстановка числовых значений.

Полезные советы

- Делайте краткую запись условия задачи (нагляднее в таблице).
- Рисуйте схемы и чертежи (если возможно).
- Проверяйте логичность полученного уравнения.
- Следите за правильностью математических преобразований.

учитель будущего

Памятка: как составить уравнение по тексту задачи

Шаг 1. Анализ условия задачи

Внимательно прочитайте задачу несколько раз. Выделите ключевые данные: числа, величины, отношения между ними. Определите, что нужно найти.
Обозначьте неизвестное значение буквой (чаще всего x)

Шаг 2. Перевод текста в математические выражения

Найдите связи между известными и неизвестными величинами. Запишите все условия задачи в виде равенств или неравенств. Используйте формулы из соответствующей темы.

Шаг 3. Составление математической модели (уравнения или системы уравнений)

Выберите главное равенство из условия задачи. Подставьте в него известные и неизвестные величины. Упростите полученное равенство

Шаг 4. Проверка уравнения и ответа

Проверьте соответствие единиц измерения. Убедитесь, что все условия задачи учтены. Проанализируйте, имеет ли смысл полученный корень уравнения.

Задача. Велосипедист отправился из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 48 км. На обратном пути он увеличил скорость на 4 км/ч и затратил на дорогу на 1 час меньше времени, чем при поездке из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

учитель будущего

Задача. Велосипедист отправился из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 48 км. На обратном пути он увеличил скорость на 4 км/ч и затратил на дорогу на 1 час меньше времени, чем при поездке из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста из A в B

Шаг 1. Анализ условия задачи

Внимательно прочитайте задачу несколько раз. Выделите ключевые данные: числа, величины, отношения между ними. Определите, что нужно найти. Обозначьте неизвестное значение буквой (чаще всего x)

учитель будущего

Задача. Велосипедист отправился из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 48 км. На обратном пути он увеличил скорость на 4 км/ч и затратил на дорогу на 1 час меньше времени, чем при поездке из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

Шаг 2. Перевод текста в математические выражения

Найдите связи между известными и неизвестными величинами. Запишите все условия задачи в виде равенств или неравенств. Используйте формулы из соответствующей темы.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста из А в В

А ————[48 км]————> В

t = 48/x ← обратно: t – 1 = 48/(x+4)

A <————[48 км]———— В

Направление	**Расстояние**	**Скорость**	**Время**
Из А в В	48 км	x км/ч	$\frac{48}{x}$
Из В в А	48 км	(x+4) км/ч	$\frac{48}{x+4}$

учитель будущего

Задача. Велосипедист отправился из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 48 км. **На обратном пути** он увеличил скорость на 4 км/ч и **затратил на дорогу на 1 час меньше времени**, чем при поездке из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

Пусть *x* км/ч — скорость велосипедиста из А в В

A ————[48 км]————> B
t = 48/x ← обратно: t – 1 = 48/(x+4)
A <————[48 км]———— B

Направление	Расстояние	Скорость	Время
Из А в В	48 км	х км/ч	$\frac{48}{x}$
Из В в А	48 км	(х+4) км/ч	$\frac{48}{x+4}$

Шаг 3. Составление математической модели (уравнения или системы уравнений)

Выберите главное равенство из условия задачи. Подставьте в него известные и неизвестные величины. Упростите полученное равенство.

$$\frac{48}{x} - \frac{48}{x+4} = 1$$

учитель будущего

Задача. Велосипедист отправился из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 48 км. **На обратном пути** он увеличил скорость на 4 км/ч и **затратил на дорогу на 1 час меньше времени**, чем при поездке из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста из А в В

А ————[48 км]————> В
t = 48/x ← обратно: t – 1 = 48/(x+4)
А <————[48 км]———— В

Направление	Расстояние	Скорость	Время
Из А в В	48 км	х км/ч	$\frac{48}{x}$
Из В в А	48 км	(х+4) км/ч	$\frac{48}{x+4}$

$x_1 = 12, x_2 = -16$ (не подходит по смыслу задачи)

Значит 12 км/ч скорость велосипедиста на пути из А в В.
Ответ: 12 км/ч.

Шаг 4. Проверка уравнения и ответа
Проверьте соответствие единиц измерения. Убедитесь, что все условия задачи учтены. Проанализируйте, имеет ли смысл полученный корень уравнения.

$$\frac{48}{x} - \frac{48}{x+4} = 1$$

Проверка:

- Время из А в В: 48 : 12 = 4 часа
- Время обратно: 48 : 16 = 3 часа
- Разница: 1 час (соответствует условию)

учитель будущего

Фрагмент урока

Тема: Решение текстовых задач на совместную работу

Цель урока:
Научить учащихся переходить от словесного описания задачи на работу к алгебраической модели.
Задача для устной работы:
Один насос может наполнить бассейн за 6 часов, а другой — за 4 часа. За какое время наполнят бассейн оба насоса, работая вместе?

1. Актуализация знаний (1–2 мин)
Задача для обсуждения: Один насос может наполнить бассейн за 6 часов, а другой — за 4 часа. За какое время наполнят бассейн оба насоса, работая вместе?
Учитель:
- Представьте: бассейн пустой. Один насос заполняет его за 6 часов. Какую часть бассейна он заполнит за 1 час?
→(Ожидаемый ответ: за 1 час он заполняет $\frac{1}{6}$ бассейна.)
- А второй — за 4 часа. Сколько он делает за 1 час?
→ $\frac{1}{4}$ бассейна.
- Какую часть бассейна заполнят за час оба насоса, работая вместе?
→ $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

- ➢ **Работа**
- ➢ **Производительность**
- ➢ **Время**

$$1:\frac{5}{12}=\frac{12}{5}=2{,}4\ (\text{ч})$$

учитель будущего

Задача. Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

учитель будущего

Задача. Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

	Работа	Производительность	Время
1 рабочий	60 деталей	x+10 дет/час	$\frac{60}{x+10}$ час
2 рабочий	60 деталей	x дет/час	$\frac{60}{x}$ час

учитель будущего

Задача. Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

	Работа	**Производительность**	**Время**
1 рабочий	60 деталей	x+10 дет/час	$\frac{60}{x+10}$ час
2 рабочий	60 деталей	x дет/час	$\frac{60}{x}$ час

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3$$

Эффект Зейгарник

учитель будущего

это психологический феномен, при котором человек лучше запоминает незавершённые действия, чем завершённые. Простыми словами: если человек не довёл начатое до конца, его сознание и подсознание периодически возвращаются к этой задаче, даже если он пытается переключиться на что-то другое.

Умея составлять уравнения, мы учимся не просто решать — мы учимся понимать мир.

Уравнение — это мост между миром вокруг нас и миром математики.

Спасибо за внимание!